APENDICE ESTADISTICO ACTUARIAL

Revisión de conceptos fundamentales de Estadística, Demografía y Cálculo Actuarial

FINANCIAMIENTO DE LOS SISTEMAS PREVISIONALES

Enrique Dieulefait
Estadístico Matemático

- Medidas resumidas
- Modelos contingentes
- Funciones de Probabilidad
- Tablas de Mortalidad
- Esperanza de Vida a la edad x
- Tablas Actuariales
- Anualidades de una Renta Vitalicia
- Anualidades de un Retiro Programado
- Prima de un Seguro de Vida

... recién cuando se mide aquello de lo que se está hablando y se logra expresarlo con cifras, comienza el conocimiento. Cuando un problema aún no logró ser expresado en términos de información numérica, quizá se esté en los comienzos del conocimiento, pero difícilmente se podrá admitir que se ha avanzado en el camino de la ciencia, cualquiera sea el tema que se considere...

Lord Kelvin

ELEMENTOS DE ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Cualquier labor de investigación nos pone frente a la necesidad de interpretar mediciones, cuyos resultados debemos presentar, resumir y describir en forma coherente.

Los métodos estadísticos describen el comportamiento de las observaciones mediante un conjunto de medidas resumidas, tales como *cantidad* de observaciones, *valor promedio* de las mismas, *variabilidad*, *forma de la distribución* y muchas otras.

Con estas medidas resumidas podemos comparar observaciones, identificar relaciones significativas entre las variables observadas, y definir grupos homogéneos. Una correcta descripción de las observaciones es el primer paso en el camino del conocimiento.

Cuando queremos resumir el comportamiento de un conjunto de observaciones, lo habitual es comenzar por calcular la *media aritmética* de las mismas:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

y asignarle una condición de *valor representativo* del conjunto de las *n* observaciones. Por lo general esto es correcto, sobre todo si las observaciones corresponden a mediciones antropométricas, como lo fueran para Karl Pearson, pionero de los métodos estadísticos a principios del siglo XX.

La descripción del comportamiento de un conjunto de observaciones se complementa con una medida de la variabilidad en torno de la media, llamada variancia:

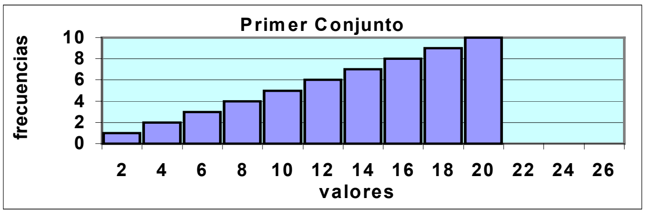
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right)^2$$

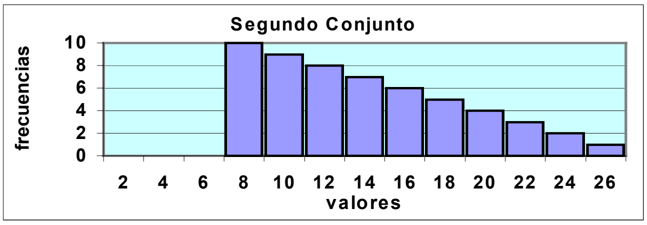
La dimensión de esta medida resumida (cuadrado de la dimensión de las observaciones), invita a sustituirla por el desvío estándar, el que está expresado en la misma unidad de medida que las observaciones:

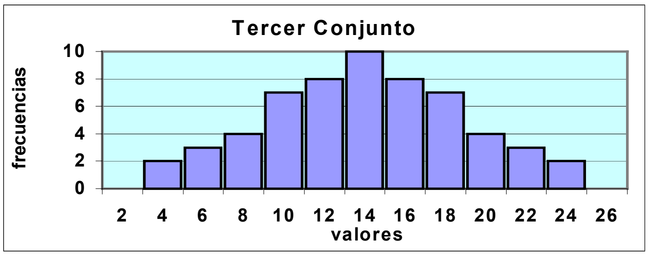
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right)^2}$$

En los primeros tiempos, la *media aritmética* y la *variancia* (o el *desvío estándar)* eran por sí mismas, indiscutible expresión de la *tendencia central* y de la *variabilidad* de un conjunto de observaciones.

Este arraigado concepto no es suficiente para describir el comportamiento del conjunto de observaciones. Observemos las tres distribuciones siguientes: todas con la misma cantidad de observaciones $(n=55)$, la misma media $(\bar{x}=14)$ y casi exactamente el mismo desvío estándar $(\sigma \cong 4.90)$







A pesar de coincidir en el valor numérico de estas tres medidas resumidas, estas tres distribuciones son marcadamente dispares; tienen distinta asimetría, propiedad que suele expresarse a través de la correspondiente medida resumida:

$$A_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^3$$

Estas operaciones aritméticas, promedio de potencias de desvíos entre cada una de las observaciones y su media, así como los primeros modelos de regresión, vinculando valores de una variable con correspondientes valores de otra o más variables, fueron por años los instrumentos de la estadística descriptiva de la época de Karl Pearson (1857-1936).

Más tarde con Ronald A. Fisher (1890-1962), quien impulsara el desarrollo de métodos para resolver problemas de la vida real, se incorporan nuevos conceptos que liberan a la estadística de su condición de método descriptivo, e incursionan en el terreno de la inferencia y la predicción.

Cuando las observaciones tienen un comportamiento campanular y simétrico, resulta lógico considerar a la media y a la variancia como parámetros de la ley de comportamiento.

Los esfuerzos por discernir si dos grupos de observaciones pueden considerarse definidos por la misma ley de probabilidad, son resueltos mediante pruebas de la significación de las diferencias entre los valores numéricos de las respectivas medias.

Por muchos años, las pruebas de significación de las diferencias entre grupos de n_1 y n_2 observaciones basan sus decisiones en las probabilidades asociadas a diferencias entre medias, calculadas según una variable *z* definida como:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

las que con mayor rigor son sustituidas por otros criterios de significación calculados en base a una variable *t* definida como:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

En lugar de entrar en el detalle de las pruebas de significación, vamos a incursionar en el terreno del *análisis exploratorio de datos*, el que brinda un conjunto de herramientas de más fácil interpretación.

Las técnicas del Análisis Exploratorio de Datos, introducidas en 1977 por John W. Tukey (1915-2000), modifican la secuencia del análisis de información.

Mientras que para el *análisis clásico* la secuencia es:

Problema => Datos => Modelo => Análisis => Conclusiones

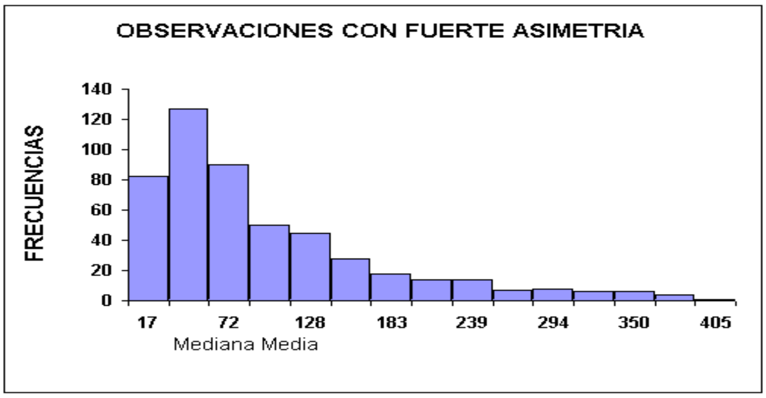
para el *análisis exploratorio de datos* la secuencia es:

Problema => Datos => Análisis => Modelo => Conclusiones

Mientras que para el *análisis clásico,* el análisis de la información viene impuesto por el modelo (normalidad, linealidad, etc.) y el análisis, estimación y pruebas consecuentes se centra en los valores de los parámetros de ese modelo en particular, para el *análisis exploratorio de datos*, la información no es sometida a un modelo predeterminado, sino que el análisis de la misma tiene por objeto determinar el modelo que le es más apropiado para describirla.

Estos enfoques parten de y llegan a conclusiones racionales, la diferencia está en la secuencia y énfasis que se pone en los pasos intermedios del análisis.

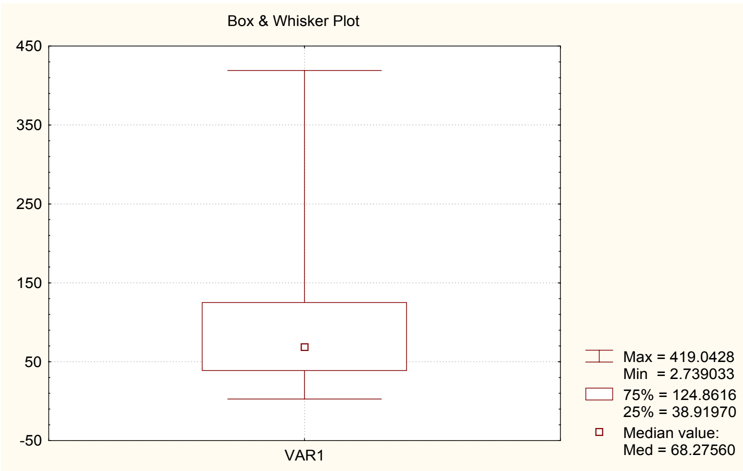
La *mediana* de un conjunto de observaciones, definida como el valor de la variable que deja a su izquierda el 50% de las mismas, proporciona una *medida de tendencia central* con apreciables ventajas respecto de la *media,* sobre todo en el caso de distribuciones con fuerte *asimetría*, ya que no está influenciada por los valores extremos.



El valor de la *media aritmética* de estas 500 observaciones, igual a 96.67 corresponde al centro de gravedad de la distribución de frecuencias, mientras que el valor de la *mediana*, igual a 68.28 proporciona una mejor medida de tendencia central de la distribución.

Un nuevo típo de representación gráfica: el *box-plot,* resulta de suma utilidad para describir el comportamiento de un conjunto de observaciones, en especial cuando las mismas tienen un comportamiento marcadamente asimétrico.

Las mismas 500 observaciones son representadas gráficamente por el siguiente *box-plot* .



en el que se observan los valores *máximo, mínimo, percentiles* 25 y 75, y el valor de la *mediana*.

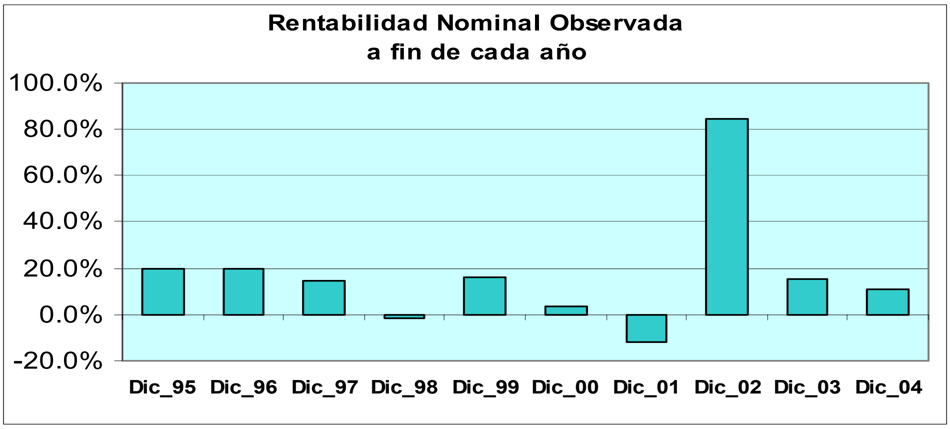
El problema de predecir nuevas observaciones de un conjunto de datos, no queda resuelto con sólo el cálculo de algunas medidas resumidas. Por lo general se trata de identificar la ley de comportamiento que siguen estas observaciones para proyectar a través de la correspondiente función de probabilidad, valores futuros de la variable.

Las cifras de la seguridad social que nos ocupan, están lejos de presentar las propiedades de las observaciones antropométricas de la época de Karl Pearson, en donde las mismas seguían leyes de comportamiento de tipo *campanular y simétrico* y estaban perfectamente descritas con el valor numérico de los parámetros *media* y *variancia*.

Observemos las cifras de *rentabilidad anual*, informadas por la Superintendencia de Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones de la Argentina (SAFJP), a diez años de vigencia del Sistema de capitalización:

Mes	Dic-95	Dic-96	Dic-97	Dic-98	Dic-99	Dic-00	Dic-01	Dic-02	Dic-03	Dic-04
Rentabilidad	19.7%	19.8%	14.8%	-1.5%	16.0%	3.2%	-11.7%	84.4%	15.2%	10.7%

y su representación gráfica:



El análisis de esta información es de fundamental importancia para proyectar cifras de rentabilidad para un período cuya extensión abarque la vida laboral de un afiliado al sistema de capitalización; aproximadamente unos 45 años.

No tiene sentido calcular el valor medio de las cifras de rentabilidad y pretender con este valor proyectar el comportamiento de esta variable. Del mismo modo carece de sentido ajustar una línea de tendencia a los valores observados y extrapolar el comportamiento de valores futuros, ya que la inusitada rentabilidad observada en Diciembre del año 2002 (84.2%), se explica por las circunstancias particulares que vivía la Argentina al momento de salir de una paridad cambiaria mantenida a rajatabla todo a lo largo de una década.

Si se elimina este valor espurio del conjunto de observaciones, las cifras de rentabilidad oscilan en un intervalo que tiene por extremos el 20% anual y el menos 12% anual.

Nuestra evidencia proporciona valores experimentales de una variable aleatoria, a partir de los cuales debemos deducir una ley de comportamiento. Comencemos por analizar el valor de las primeras dos medidas resumidas: *media aritmética* y *desvío estándar*, calculando a partir de las mismas una nueva medida de variabilidad: el *coeficiente de variación*, definido como el cociente entre el *desvío estándar* y la *media*.

$$Coeficiente\ de\ Variación = \frac{Desvío\ Estándar}{Media\ Aritmética} = \frac{11.48}{9.44} = 121.68\,\%$$

Este valor numérico señala una condición de *variabilidad extrema*. En este contexto, la representatividad de la media aritmética, como medida alrededor de la cual se concentran las observaciones, resulta cuestionable. En lugar de pensar en un *valor representativo* para esta variable, se hace necesario considerar a la misma como una variable cuyos valores se presentan según una función de probabilidad.

MODELOS CONTINGENTES

Los modelos actuariales utilizan variables aleatorias para proyectar el comportamiento de las observaciones de la vida real. Un sistema previsional de *pensiones* debe estudiar las características demográficas de la población, así como las condiciones financieras del mercado y estar en condiciones de proyectarlas.

A diferencia de los modelos matemáticos que describen relaciones inmutables entre las observaciones, en el mundo de los fenómenos socioeconómicos, son necesarios métodos que permitan describir relaciones contingentes, es decir relaciones ciertas en términos de probabilidad.

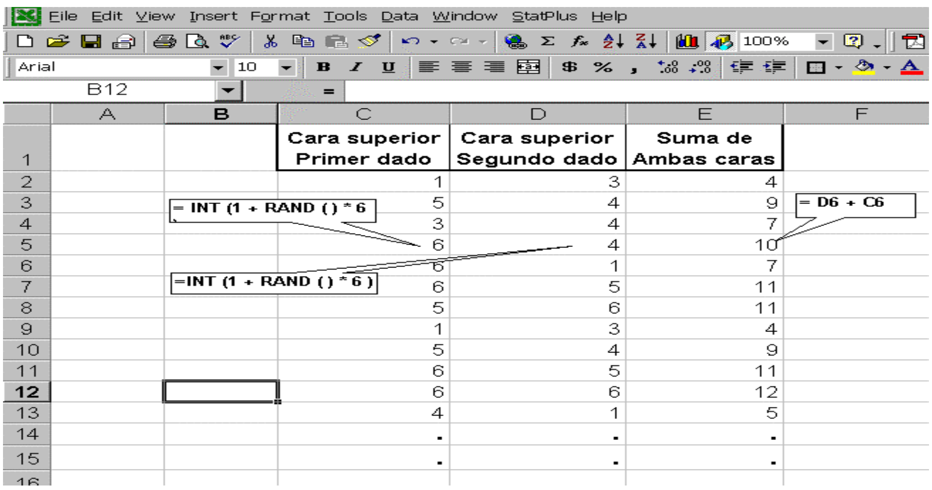
Quién de nosotros no echó a rodar, alguna vez, un dado sobre un tapete?

Sus seis caras se presentan con igual probabilidad, si se trata de un dado honesto. Quizás nos preocupe. en estos tiempos, hasta la honestidad del dado, pero si en sucesivas tiradas al azar del mismo dado, vemos insinuarse para cada uno de los resultados posibles, una distribución de frecuencias uniforme, podremos terminar otorgando credibilidad a la posibilidad de que ése dado en particular, sea un dado honesto.

Si en lugar de un dado, arrojamos dos dados sobre el tapete y observamos el valor de la suma de los puntos que presentan las caras superiores de ambos dados, esta suma, que presenta valores entre dos y doce, no muestra todos sus resultados con igual probabilidad. Cualquiera de nosotros que haya arrojado más de una vez un par de dados, conoce por experiencia que la probabilidad de obtener un "*siete*" es mayor que la probabilidad de obtener un "*dos*" o un "*doce*", si ambos dados son honestos.

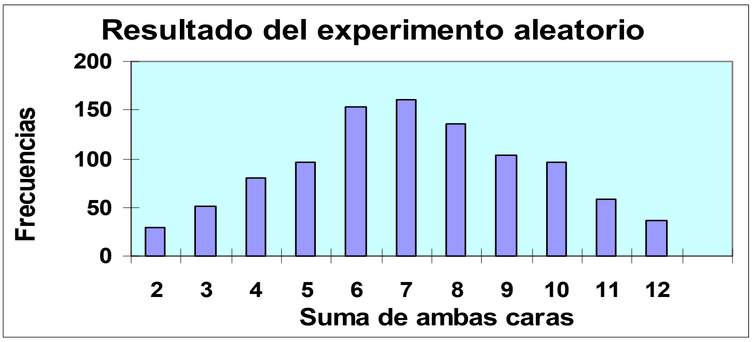
Una de las maravillas del computador, es que pone a nuestro alcance dados honestos.

El experimento aleatorio que simula el resultado de arrojar 1000 veces dos dados y registra el valor de la suma de la cara superior de los mismos, podría realizarse en una planilla de cálculo de acuerdo con el siguiente esquema:



	A	B	C	D	E	F
1			Cara superior Primer dado	Cara superior Segundo dado	Suma de Ambas caras	
2			1	3	4	
3		= INT (1 + RAND () * 6	5	4	9	= D6 + C6
4			3	4	7	
5			6	4	10	
6			6	1	7	
7		=INT (1 + RAND () * 6)	6	5	11	
8			5	6	11	
9			1	3	4	
10			5	4	9	
11			6	5	11	
12			6	6	12	
13			4	1	5	
14			.	.	.	
15			.	.	.	

cuyos resultados dan lugar a la siguiente distribución de frecuencias:



para cuyas frecuencias relativas reconocemos la vigencia de una ley de probabilidad *triangular, discreta y simétrica,* definida en el intervalo (2 , 12).

En el terreno de los fenómenos socio-económicos, las funciones de probabilidad que gobiernan los experimentos aleatorios, no son tan sencillas de identificar. Los modelos que describen las relaciones entre las variables son resueltos con la ayuda de funciones de probabilidad que permiten interpretar el comportamiento de los resultados del estudio.

La *distribución normal*.

Una de las funciones de probabilidad más difundidas es la *función normal,* no sólo porque es apta para describir el comportamiento de muchas variables del mundo de las ciencias naturales, sino por ser la distribución de probabilidad del *valor medio* de un conjunto de observaciones provenientes de una población con cualquier función de probabilidad.

Esta propiedad, consecuencia del *teorema central límite,* pone a la *función normal* a la vanguardia de las funciones de probabilidad que se utilizan en estadística.

Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

con parámetros:

$$\mu = E(X) \quad \text{y} \quad \sigma^2 = Var(X)$$

Su amplia difusión nos exime de la necesidad de ejemplificar su utilización.

La *rentabilidad* es sin duda, una variable aleatoria cuyo comportamiento no puede estar resumido en un solo número. Su comportamiento debe ser expresado mediante una función de probabilidad. Como por lo general las cifras de rentabilidad son positivas y su distribución de frecuencias presenta asimetría positiva, es frecuente expresar las mismas a través de una función de probabilidad *lognormal*, es decir una ley *normal* en los logaritmos de las observaciones.

La *distribución lognormal*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma\ x}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

con parámetros:

$$\mu = E(\ln(x)) \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \text{var}\ (\ln(X))$$

siendo:

$$E(X) = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \quad \text{y} \quad Var\ (X) = e^{(2\mu + \sigma^2)}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Estas expresiones de *E(X)* y *Var(X)* permiten escribir μ y σ^2:

$$\mu = \ln[E(X)] - 0.5\ \ln\left\{\frac{Var(X)}{[E(X)]^2} + 1\right\} \quad ; \quad \sigma^2 = \ln\left\{\frac{Var(X)}{[E(X)]^2} + 1\right\}$$

La distribución *lognormal* es una función de probabilidad frecuentemente utilizada para expresar el comportamiento de observaciones con asimetría positiva, en donde la mayoría de los valores ocurren en las proximidades del valor mínimo.

Lamentablemente, la evidencia de cifras de rentabilidad negativa, invalida la utilización de esta función de probabilidad. Una función de densidad que podríamos utilizar en sustitución de la misma sería la f*unción de probabilidad triangular*.

La *función de probabilidad triangular*, no impone a las observaciones la condición de presentar sólo valores positivos y utiliza como parámetros de su expresión el valor *mínimo*, el *máximo* y el *valor más probable*, el que, según se ubique más cerca del *mínimo* o del *máximo*, define la asimetría de la distribución.

Su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} & si \quad a \le x \le b \\ \dfrac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} & si \quad b < x \le c \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

En donde a identifica al valor mínimo de la variable, c identifica al valor máximo, y b al *valor más probable*, conocido como *modo* de la distribución.

Siendo : $E(X) = \dfrac{a+b+c}{3}$ $\qquad Var(X) = \dfrac{1}{18}\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$

En nuestra planilla de cálculo la *función de probabilidad triangular* es una función más, dentro del repertorio de funciones generadoras de números al azar. Su expresión es:

$$RNGTriang\ (Mínimo, Valor\ mas\ probable, Maximo)$$

La asignación de un valor numérico al *valor más probable*, que corresponde al *modo*, ante la escasa cantidad de observaciones, cede su lugar a otra medida de tendencia central. la que puede estar expresada en términos de una media ponderada, o apelando al valor de la mediana del conjunto de observaciones.

La proyección de valores de rentabilidad, a partir de la evidencia de una reducida cantidad de observaciones, entre las que se observan valores negativos, es ejemplificada en el siguiente esquema:

Año Term	Rentab
Dic-95	19.70%
Dic-96	19.80%
Dic-97	14.80%
Dic-98	-1.50%
Dic-99	16.00%
Dic-00	3.20%
Dic-01	-11.70%
Dic-02	84.40%
Dic-03	15.20%
Dic-04	10.70%
k*Minimo	-10.53%
k*Maximo	17.82%
Avg, Med	11.71%

del que se extraen los parámetros de la función generadora de valores aleatorios con distribución triangular

$$RNGTriang\ (-10.53\ ,\ 11.71\ ,\ 17.82)$$

los que permiten generar valores aleatorios de la variable, que satisfacen esta función de probabilidad y sus parámetros.

ELEMENTOS DE CALCULO ACTUARIAL

Ningún estudio serio en materia previsional puede prescindir del uso de adecuadas *tablas demográficas*, tales como las que presentamos a continuación

ESTRUCTURA DE LA TABLA Hm (1869)

x	lx	dx	qx	N'x	E'x
0	127283	14358	11.28%	6018398	47.78
1	112925	3962	3.51%	5905473	52.80
2	108963	2375	2.18%	5796510	53.70
3	106588	1646	1.54%	5689922	53.88
4	104942	1325	1.26%	5584980	53.72
5	103617	1061	1.02%	5481363	53.40

donde

x representa la edad
lx el número de sobrevivientes a la edad x
dx el número de defunciones a la edad x
qx la probabilidad de muerte a la edad x
E'x la Esperanza de Vida a la edad x

Esta Tabla de Mortalidad, conocida bajo el nombre de *Healthy Males* y que ha de despertar la nostalgia de los estudiosos del tema, muestra la baja esperanza de vida al nacer, así como las inquietantes cifras de mortalidad infantil de aquella época, (1869).

ESPERANZA DE VIDA

Simbolizamos la *Esperanza de Vida* a la edad x según E(x) y la definimos como la cantidad promedio de años que han de vivir las personas de edad x de una población.

Para su cálculo, tendremos en cuenta que hay quienes fallecen en el curso del primer año, del segundo, del tercero, e incluso quienes alcanzan la edad extrema de la Tabla: ω .

De las l_x personas de edad x de la Tabla:

cumplen 1 año más de vida, pero no 2 : $(l_{x+1} - l_{x+2})$,
cumplen 2 años más de vida, pero no 3 : $(l_{x+2} - l_{x+3})$,
cumplen 3 anos más de vida, pero no 4 : $(l_{x+3} - l_{x+4})$, ...

y así, hasta agotar todas las edades de la tabla. En consecuencia:

$$E'_x = \frac{1\left(l_{x+1} - l_{x+2}\right) + 2\left(l_{x+2} - l_{x+3}\right) + 3\left(l_{x+3} - l_{x+4}\right) + \cdots}{l_x}$$

la que se simplifica

$$E'_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_\omega}{l_x}$$

y se denomina Esperanza de Vida (*abreviada*) a la edad x.

Si las defunciones ocurren en modo uniforme a lo largo del año, y no en el preciso momento de agregar un año más a la edad, la Esperanza de Vida (*completa*) a la edad x resulta:

$$E_x = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_\omega}{l_x}$$

Para facilitar el cálculo de la Esperanza de Vida, las Tablas de Mortalidad presentan con el símbolo N'x el valor del numerador del segundo término de la anterior expresión, resultando

$$E_x = \frac{1}{2} + \frac{N'_x}{l_x}$$

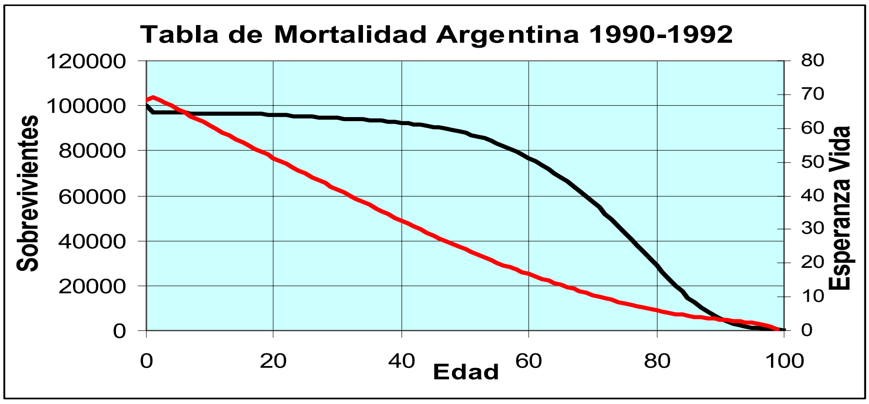
Los valores de la Esperanza de Vida, presentados por primera vez en el siglo XVIII por Monsieur du Buffon en su *"Tratado de Historia Natural"*, han crecido en forma sostenida, como lo muestra el siguiente cuadro en el que son comparados con los correspondientes a tablas actuariales de amplia difusión hasta hace pocos años.

ESPERANZA DE VIDA EN DISTINTAS EPOCAS

Esperanza de Vida a la edad	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**
M. du Buffon (Siglo XVIII)	33.41	28.00	22.08	16.58	11.08	6.16
Healthy Males (Siglo XIX)	42.10	34.73	27.39	20.27	13.81	8.49
Common Standard (Debut XX)	53.27	44.16	34.96	26.20	18.24	11.54

El crecimiento de los valores de la Esperanza de Vida a la edad x , sugiere la necesidad de mantener actualizado el conocimiento de la población. De no preocuparnos por actualizar la variable demográfica, caeríamos en el terreno común de utilizar instrumentos inadecuados, por cuanto el riesgo de las operaciones actuariales de Seguro de Vida y/o Renta Vitalicia no sería correctamente evaluado.

El siguiente gráfico, elaborado a partir de la Tabla de Mortalidad Argentina 1990-1992, (INDEC), muestra el comportamiento de la Función de Sobrevivencia, y de la Esperanza de Vida a la edad x .



Para responder a los problemas propios de un sistema previsional, debemos recurrir a Tablas Actuariales como la siguiente

T A B L A A C T U A R I A L

T A S A D E I N T E R E S 4.0 % A N U A L

Edad	lx	dx	qx	N'x	Dx	Nx	Cx	Mx	Ex
0	100000	2713	2.71%	6792015	100000	2227768	2608.7	10470.5	68.42
1	97287	237	0.24%	6694728	93545	2134222	219.1	7861.8	69.31
2	97050	99	0.10%	6597678	89728	2044494	88.0	7642.7	68.48
3	96951	68	0.07%	6500727	86189	1958305	58.1	7554.7	67.55
4	96883	49	0.05%	6403844	82816	1875489	40.3	7496.6	66.60
5	96834	39	0.04%	6307010	79590	1795899	30.8	7456.3	65.63
6	96795	37	0.04%	6210215	76498	1719400	28.1	7425.5	64.66
7	96758	35	0.04%	6113457	73528	1645872	25.6	7397.3	63.68
8	96723	35	0.04%	6016734	70675	1575198	24.6	7371.8	62.71
9	96688	34	0.04%	5920046	67932	1507266	23.0	7347.2	61.73
10	96654	34	0.04%	5823392	65296	1441970	22.1	7324.2	60.75

Cuya estructura se define a continuación:

ELEMENTOS DE UNA TABLA ACTUARIAL

l_x	Número de sobrevivientes a la edad x
d_x	Número de defunciones a la edad x
i	Tasa de Interés anual (tanto por uno)
$v = 1 / (1 + i)$	Factor de Descuento
$D_x = l_x v^x$	Conmutación de Primer Orden. Valor Actual descontado a x años, de un capital unitario pagado a cada uno de los l_x sobrevivientes de edad x de la Tabla
$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega$	Conmutación de Segundo Orden. Suma de los anteriores Valores Actuales
$C_x = d_x v^{x+1}$	Conmutación de Primer Orden. Valor Actual, descontado a x+1 años, de un capital unitario pagado a cada una de las d_x personas de edad x que fallecen
$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega$	Conmutación de segundo orden. Suma de los anteriores valores actuales

Con estos elementos, resolvemos el cálculo de valores de la Esperanza de Vida, así como el cálculo de Primas Puras en problemas de Renta Vitalicia y Seguros de Vida mediante procedimientos actuariales que pasamos a describir.

RENTA VITALICIA

Consideremos el cálculo de la Prima requerida para que una persona de edad x , reciba a partir del año de concertada la operación, una Renta Vitalicia por una suma igual a R.

Para recibir, si vive, la renta del primer año, deberá pagar en concepto de prima:

$$R\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)(1+i)^{-1} = R\ \frac{l_{x+1}\ v}{l_x}$$

$$R\ \frac{l_{x+1}\ v\ (\frac{v^x}{v^x})}{l_x} = R\ \frac{l_{x+1}\ \ v^{x+1}}{l_x\ \ v^x} = R\ \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

para recibir además, la renta del segundo año, deberá pagar en concepto de prima

$$R\left(\frac{l_{x+2}}{l_x}\right)(1+i)^{-2} = R\ \frac{l_{x+2}\ \ v^2}{l_x}$$

$$R\ \frac{l_{x+2}\ \ v^{2}\ (\frac{v^x}{v^x})}{l_x} = R\ \frac{l_{x+2}\ \ v^{x+2}}{l_x\ \ v^x} = R\ \frac{D_{x+2}}{D_x}$$

y así hasta agotar la edad extrema de la tabla : ω

$$R\left(\frac{l_\omega}{l_x}\right)(1+i)^{-\omega+x} = R\ \frac{l_\omega\ \ v^{\omega-x}}{l_x}$$

$$R\ \frac{l_\omega\ \ v^{\omega-x}\ (\frac{v^x}{v^x})}{l_x} = R\ \frac{l_\omega\ \ v^\omega}{l_x\ \ v^x} = R\ \frac{D_\omega}{D_x}$$

La Prima Unica de esta Renta Vitalicia Inmediata es igual a la suma de todos estos importes, hasta alcanzar la edad extrema de la Tabla de Mortalidad.

$$a_x = R\ \frac{[\ D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega\ ]}{D_x}$$

$$a_x = R\ \frac{N_x}{D_x}$$

Recíprocamente, la Renta Vitalicia que corresponde a un Capital Integrado, resulta

$$R = a_x\ \frac{D_x}{N_x}$$

BUSQUEDA EN TABLA

El cálculo de la Esperanza de Vida, lo mismo que el cálculo de la Renta Vitalicia que corresponde al monto capitalizado de los aportes personales hechos a lo largo de la vida laboral, se simplifica si utilizamos las Funciones de Búsqueda en Tabla disponibles en una Planilla de Cálculo.

Para estos cálculos utilizamos como instrumento de evaluación, la Función de Búsqueda

= VLOOKUP (Indice , Tabla , Desplazamiento)

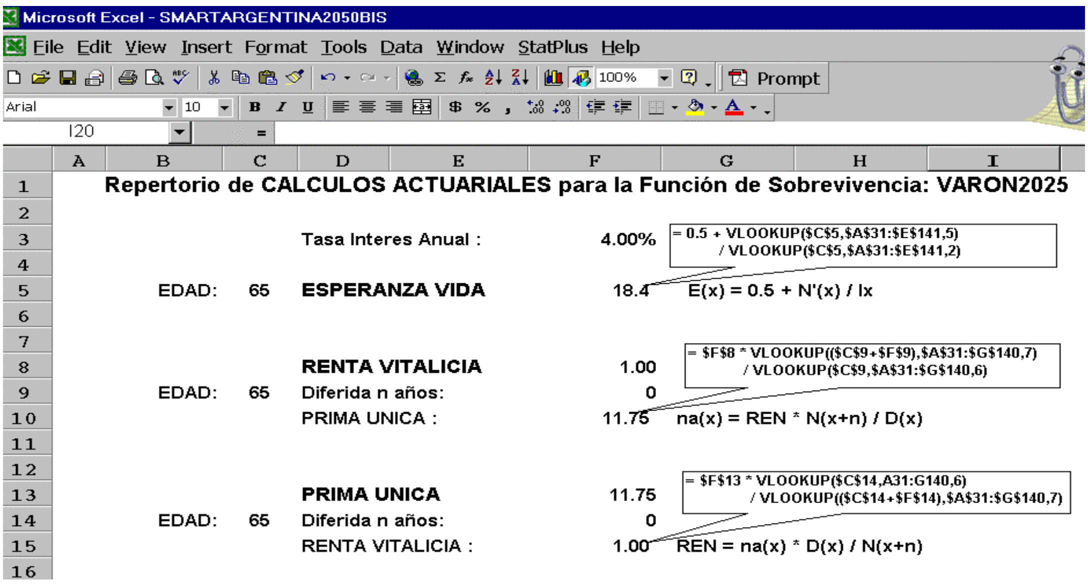
CALCULO DE LA RENTA VITALICIA

La Renta Vitalicia que le corresponde a una persona a la Edad de Retiro, en función del Capital Integrado en su Cuenta Personal, se obtiene al incluir en la Planilla de Cálculo una referencia a

$$R = CAPITAL \times \frac{VLOOKUP(Indice, Tabla, Desplazamiento)}{VLOOKUP(Indice, Tabla, Desplazamiento)}$$

donde CAPITAL indica el Monto Capitalizado de los aportes personales, la función VLOOKUP del numerador referencia al valor de conmutación D_x , y la función VLOOKUP en el denominador referencia al valor de conmutación N_x .

Los cálculos actuariales, fuertemente dependientes de Búsqueda en Tablas, brindan ámbito propicio para la utilización de estos instrumentos. El cálculo de la Esperanza de Vida, así como el de la Renta Vitalicia que corresponde al monto de los aportes personales, puede realizarse utilizando una planilla de cálculo con la siguiente disposición



La Tabla Actuarial considera una función de sobrevivencia correspondiente a una Población de Varones proyectada para el año 2025 y una tasa de interés del 4% anual.

La *llamada* que señala el cálculo de la Esperanza de Vida a la edad de 65 años, muestra el resultado: 18.4 años, así como el detalle de las funciones de búsqueda utilizadas para la determinación del correspondiente valor.

Del mismo modo observamos que, para que una persona de 65 años obtenga una Renta Vitalicia cuyo importe anual sea igual a su último salario, el correspondiente valor de la Prima Pura es de 11.75 Salarios del último año de trabajo.

Recíprocamente observamos, para las anteriores condiciones de mortalidad e interés, que una persona de 65 años con un Capital de 11.75 veces su último Salario, puede adquirir una Renta Vitalicia Pura igual a su ultimo salario.

Estos resultados dependen de la función de sobrevivencia y de la tasa de interés que se considere. Se puntualiza además, que estos cálculos corresponden a una Prima Pura, y no a una Prima de Tarifa en la que se incluyen gastos, comisiones, previsiones y beneficios que presupone la actividad comercial.

RETIRO PROGRAMADO

Una alternativa muy difundida en el Sistema Previsional de Capitalización, es el Retiro Programado, el que proporciona una Renta Cierta, durante un número de años igual a la Esperanza de Vida del beneficiario al momento del retiro. Este sistema, a diferencia de la Renta Vitalicia, permite a los herederos del beneficiario, acceder al Saldo del Ahorro Acumulado en caso en que el deceso se cumpla antes de vencer el plazo correspondiente a los años de su Esperanza de Vida al momento del retiro.

En la alternativa de Renta Vitalicia esto no es posible, por cuanto el riesgo corre por cuenta de la Compañía de Seguros de Retiro, la que compensa el costo de atender la sobrevida de algunos de sus clientes, con el beneficio derivado del deceso prematuro de otros.

Esta es una de las razones invocadas para ofrecer la opción de Retiro Programado frente a la alternativa de la Renta Vitalicia. No obstante, nada se dice respecto de que en el Retiro Programado el riesgo de la Sobrevida del Beneficiario corre por cuenta del mismo, ya que las correspondientes Anualidades se establecen para un número de períodos fijo e igual a la Esperanza de vida del beneficiario al momento de Retiro.

El mundo financiero, conciente de este problema, suele ofrecer la alternativa de la Hipoteca Revertida, la que permite al beneficiario del Retiro Programado atender, con cargo a los derechos sobre sus bienes materiales, los problemas económicos derivados de su longevidad.

Desde la óptica de la Compañía de Seguros de Retiro, la opción del retiro programado pone a ésta a cubierto de un aumento en los valores de la esperanza de vida a la edad de retiro, hecho que, dado los continuos avances de la medicina en la prolongación de la vida, no es de desestimar.

IMPORTE DEL RETIRO PROGRAMADO.

Al momento del Retiro, el Beneficiario tiene acumulado en su Cuenta Previsional un Capital C, el que aplicado a la compra del Retiro Programado, le ha de proporcionar una Renta Cierta durante una cantidad de años igual a su Esperanza de Vida al momento del Retiro.

Considerando este Capital como el Valor Actual del flujo de fondos correspondiente a las anualidades (vencidas) del Retiro Programado, se tiene:

$$C = A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3 + \cdots + A_N v^N$$

donde N es igual a la parte entera de la Esperanza de Vida del afiliado al momento del Retiro, y $v = \dfrac{1}{1+i}$ el factor de descuento para el cálculo del valor actual del flujo de fondos.

Cómo el importe de cada una las anualidades del Retiro Programado es constante, podemos escribir

$$C = A\, v\left(1 + v + v^2 + \cdots + v^{N-1}\right)$$

en la que, sustituyendo el paréntesis por el valor de la suma de los N primeros términos de una progresión geométrica de razón v , y primer término 1 resulta:

$$C = A\ v\ \frac{v^{N-1} - 1}{v - 1}$$

INCIDENCIA DE LA INFLACIÓN

Hasta ahora consideramos sólo valores de la Tasa Efectiva de Interés, es decir la que resulta de la operación comercial, sin tener en cuenta la inflación. Como en las operaciones de Renta y Seguro es dable atender a la necesidad de expresar valores en términos de una moneda constante, vamos a reformular nuestros esquemas de cálculo a fin de considerar explícitamente la existencia de la inflación, expresada en términos de una Tasa Anual.

Teniendo en cuenta que

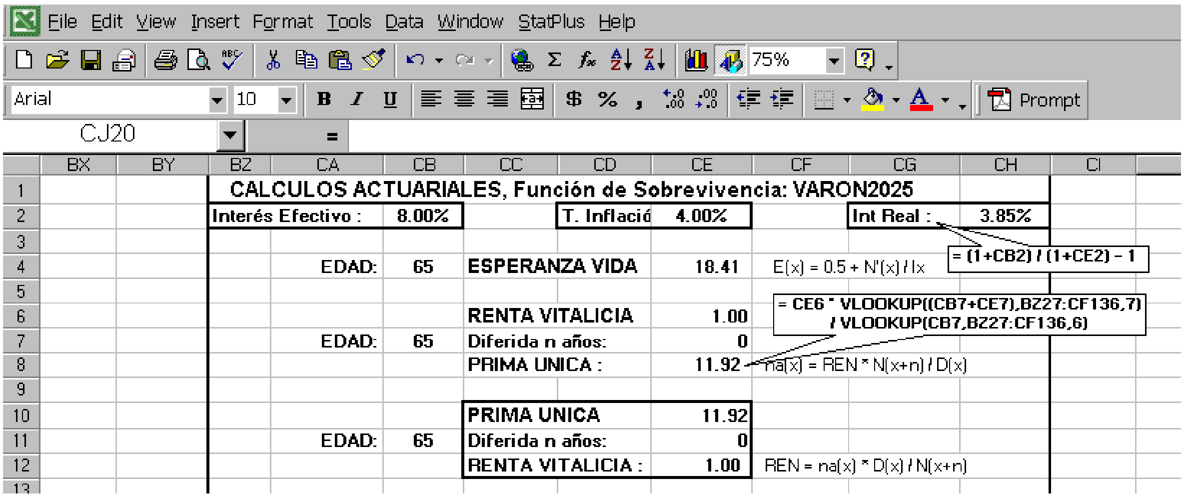
$$(1 + \text{Tasa de Interes Real}) = \frac{(1 + \text{Tasa de Interes Efectiva})}{(1 + \text{Tasa de Inflacion})}$$

podemos expresar a la *Tasa de Interés Real* en términos de la *Tasa de Inflación* y de la *Tasa Efectiva de Interés* considerada en la operación comercial, lo que se logra con una modificación en la estructura de la correspondiente planilla de cálculo.

RENTA VITALICIA REAL IGUAL AL ÚLTIMO SALARIO, DETERMINACIÓN DEL CAPITAL NECESARIO

La solución de este problema es inmediata si se considera una función de sobrevivencia correspondiente a un escenario apropiado y valores adecuados para la tasa de interés y para la inflación del período de renta. Consideremos como función de sobrevivencia, aquella proyectada para una población de *Varones para el año 2025*, como *tasa efectiva de interés* para el período de renta el 8.00% anual y como *tasa de inflación* para el mismo período, el 4.00% anual.

Las funciones de búsqueda en tabla de una planilla de cálculo, muestran que para esta función de sobrevivencia y los valores considerados para la *tasa efectiva de interés* e *inflación*, el importe del fondo necesario para obtener, a partir de los 65 años de edad, una *renta vitalicia real* igual al último salario percibido, es igual a 11.92 salarios anuales.



Aunque hemos considerado para el período de renta una *tasa efectiva de interés* superior a aquella utilizada en el cálculo exento de inflación, la incorporación explícita, durante el período de renta, de una *tasa de inflación media anual* del 4.00%, elevó el importe del capital requerido a 11.92 salarios anuales.

SEGURO DE VIDA

Un problema muy común en cálculo actuarial, consiste en determinar el valor de la Prima Unica que debe pagar una persona de x años, para recibir una suma S al momento de su fallecimiento.

Razonando como lo hiciéramos con el cálculo de la Renta Vitalicia, podemos considerar que para cubrir el riesgo de muerte en el primer año de concertada la operación, esta persona deberá pagar una prima de

$$S \quad (1+i)^{-1} \ (d_x \ / \ l_x)$$

es decir, el valor actual, descontado a la tasa anual i , de la suma S , multiplicada por la probabilidad de que dicho evento ocurra, lo que está dado por el cociente entre el número de defunciones : d_x y el número de personas expuestas al riesgo de muerte : l_x .

Para cubrir además, el riesgo de que esa persona fallezca durante el segundo año, la misma deberá pagar una prima adicional de

$$S \quad (1+i)^{-2} \; (d_{x+1} \,/\, l_x)$$

y así hasta llegar a ω , la edad extrema de la Tabla de Mortalidad.

El valor de la Prima Unica a pagar : A_x , estará entonces dado por la suma de todos estos componentes

$$A_x = S \;\{ (1+i)^{-1} d_x + (1+i)^{-2} d_{x+1} + (1+i)^{-3} d_{x+2} + \cdots \} \;/\; l_x$$

valor que, expresado en términos de los conocidos coeficientes de descuento v , escribimos

$$A_x = S \;\{\; v \; d_x \; + v^2 \; d_{x+1} \; + v^3 \; d_{x+2} \; + \; \cdots \;\} \;\;/\;\; l_x$$

Multiplicando y dividiendo esta expresión por v^x tenemos:

$$A_x = S \{ v^{x+1} \; d_x + v^{x+2} \; d_{x+1} + v^{x+3} \; d_{x+2} + \cdots \} \;/\; (\, v^x \; l_x)$$

La que, recordando que

$$C_x = v^{x+1} \; d_x$$

y además que

$$v_x \; l_x \;\; = \;\; D_x$$

puede expresarse según

$$A_x = S \; \{ C_x + C_{x+1} + C_{x+2} \cdots \} \;\; / \; D_x$$

La frecuente necesidad de evaluar estos elementos, ha llevado a las Tablas Actuariales a incluir el cálculo de Valores de Conmutación de primer orden : C_x , así como Valores de Conmutación de segundo orden:

$$M_x = C_x \; + C_{x+1} \; + C_{x+2} \; + \cdots$$

por lo que el cálculo de la Prima Unica para atender el riesgo de muerte de una persona de edad x resulta

$$A_x \; = \; S \quad M_x \;\; / \; D_x$$

Además del *Seguro de Vida Entero*, que acabamos de expresar, y del *Seguro de Vida Diferido*, cuya Prima Pura está dada por la expresión:

$${}_n A_x \; = \; S \;\; M_{x+n} \;\; / \;\; D_x$$

se puede considerar el *Seguro de Vida Temporario*, donde el riesgo de muerte está cubierto sólo en el caso de que el deceso ocurra dentro de los n años de concertada la operación.

El valor de la Prima Unica que corresponde al *Seguro de Vida Temporario* está dado por:

$$ {}_nA_x' = A_x - {}_nA_x $$

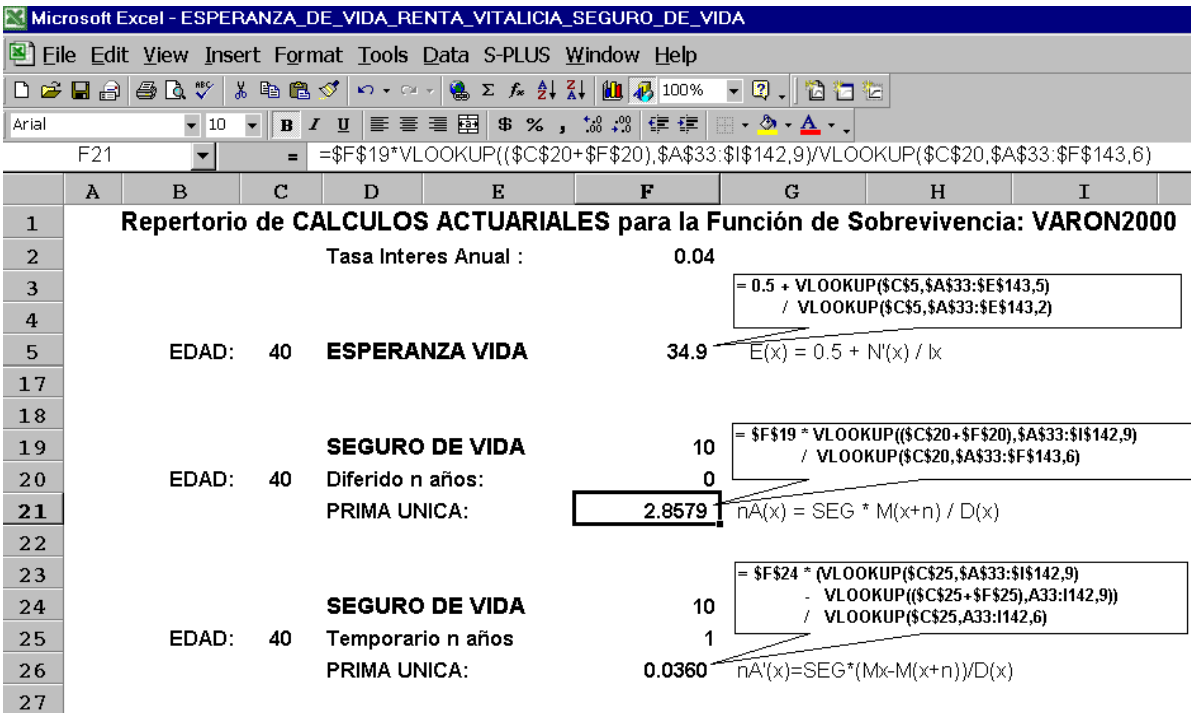
por lo que

$$ {}_nA_x' = S\ \{M_x - M_{x+n}\}\ /\ D_x $$

La valorización de estas expresiones sobre una Planilla de Cálculo es inmediata.

La siguiente estructura corresponde a una función de sobrevivencia Varón 2000 y una tasa de interés del 4% anual. En la misma se detalla el cálculo de la Esperanza de Vida de una persona de 40 años, y el valor de la Prima Pura Unica correspondiente a dos opciones de un Seguro de Vida para una cobertura de 10 salarios.

La primera opción calcula la Prima Unica correspondiente a un Seguro de Vida Inmediato (diferido en 0 años) cuyo valor resulta : 2.85 salarios, y la segunda opción la Prima Unica correspondiente a un seguro de Vida Temporario por 1 año, cuyo valor resulta 0.036 salarios.



SEGUROS A PRIMA PERIODICA

Los seguros a Prima Unica, tal como se han considerado en estas líneas, constituyen un recurso para facilitar la deducción de las correspondientes expresiones. No obstante, se debe tener en cuenta que resultan atípicos, por cuanto lo lógico es que los seguros se contraten en modo tal que, en vez de pagar por ellos una Prima Unica, el asegurado atienda al pago de una Suma Periódica durante toda la vigencia del seguro.

Estudiemos el valor de la Prima Anual que debe pagar una persona de x años, para tener derecho a recibir, en el momento de su fallecimiento, una suma S.

Recordemos el valor de la Prima Unica de un seguro de vida para una persona de edad x :

$$A_x = S\ M_x \ / \ D_x$$

en esta expresión, la Prima Unica A_x , puede considerarse como el valor actual de un flujo de fondos:

$$P_x + P_x + \ldots + P_x$$

integrado por cada una de las cuotas periódicas Px , cuyo valor queremos determinar.

Este flujo de fondos puede considerarse como una Renta Vitalicia cuya Prima Unica está dada por la fórmula

$$A_x = R\ N_x \ / \ D_x$$

Como el primer elemento de este flujo de fondos (primera cuota), se paga en el momento de contratar el seguro, el valor de la Prima Unica resulta:

$$A_x - P_x = P_x\ N_x \ / \ D_x$$

Siendo por definición:

$$D_x + N_x = N_{x-1}$$

se tiene

$$P_x = A_x\ \ D_x \ / \ N_{x-1}$$

Sustituyendo en ésta A_x por su valor :

$$A_x = S\ \ M_x \ / \ D_x$$

resulta

$$P_x = S\ M_x \ / \ D_x \times D_x \ / \ N_{x-1}$$

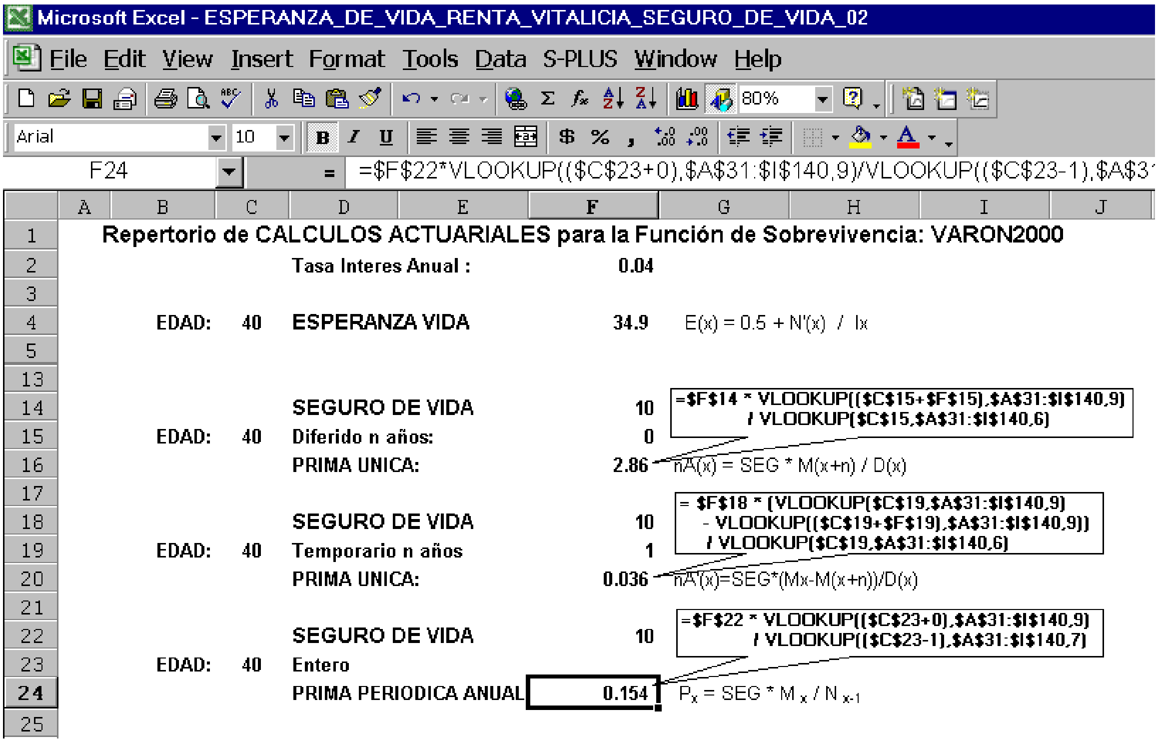
por lo que

$$P_x = S\ \ M_x \ / \ N_{x-1}$$

corresponde al valor de la Prima Periódica Anual que una persona de edad x debe abonar a comienzos de cada año, para cubrir el Seguro de Vida contratado por la suma S.

PROCEDIMIENTO DE CALCULO PARA LA PRIMA PERIODICA ANUAL

Con estos elementos, encaramos el cálculo de la Prima Periódica Anual que debe abonar una persona de 40 años que desea contratar un Seguro de Vida Entero por la suma de 10 salarios. La Función de Sobrevivencia, así como la tasa de Interés, son las mismas vistas en el problema anterior.



Cada una de estas llamadas explícita el uso de Funciones de Búsqueda en Tabla para determinar, a partir de una apropiada función de supervivencia y tasa de interés, el valor de la Correspondiente Prima Pura.

A MODO DE EPILOGO

Los elementos presentados en este Apéndice Estadístico-Actuarial se incluyen como complemento del estudio "Financiamiento de los sistemas previsionales"**.** No suplen la necesidad de una sólida formación en métodos cuantitativos y análisis de datos.

La misma planilla de Excel, además de dar sustento a las expresiones vistas y facilitar notablemente el cálculo, invita al agregado de alternativas respecto de la función de sobrevivencia a considerar.

Tal como se observa en el siguiente Cuadro, la elección de la función de sobrevivencia, está a una sola tecla de distancia, lo que facilita notablemente la tarea del estudioso de estos problemas al evaluar alternativas frente a distintos escenarios demográficos.

Con sólo desplazar un botón, se está trabajando con una función de sobrevivencia elegida dentro de un repertorio, el que no tiene por qué estar limitado a las funciones del ejemplo.

Además, para el caso de las funciones de sobrevivencia GAM71 y GAM83, la proporción de varones correspondiente a la Tabla Unisex, responde al valor arbitrario que se ingrese en la respectiva celda.

	B	C	D / E	F	G / H	K	L	M
1	CALCULOS ACTUARIALES para la Función de Sobrevivencia: GAM71 USX							
2			Tasa Interes Anual :	4.00%	0.96154 = v	MENU lx		
3						Hm 1869		
4	EDAD:	65	ESPERANZA VIDA	17.30	E(x) = 0.5 + N'(x) / lx	Com Stand		
5						VARON 47		
6			RENTA VITALICIA	2096		MUJER 47		
7	EDAD:	65	Diferida n años:	0		VARON 91		
8			PRIMA UNICA :	23706	na(x) = REN * N(x+n) / D(x)	MUJER 91		
9						UNISEX 91		
10			PRIMA UNICA	23706		GAM71 VAR		% varones
11	EDAD:	65	Diferida n años:	0		GAM71 MUJ		en Unisex
12			RENTA VITALICIA :	2096	REN = na(x) * D(x) / N(x+n)	GAM71 USX	50%	
13						GAM83 VAR		
14			RETIRO PROGRAMADO	2096		GAM83 MUJ		
15			Años completos	17		GAM83 USX	50%	
16	EDAD:	65	CAPITAL	26519	C = A * (v^N - 1) / (V - 1)	INDER 84		% varones
17						LIN100		en Unisex
18	EDAD:	65	PRIMA UNICA	26519				
19			Años completos	17				
20			ANUALIDADES CIERTAS	2180	A = C * i / [1 - {1 / (1 + i) }^n]			
21								
22			SEGURO DE VIDA	10000				
23	EDAD:	65	Diferido n años:	0				
24			PRIMA UNICA :	5265.3	nA(x) = SEG * M(x+n) / D(x)			
25								
26			SEGURO DE VIDA	10000				
27	EDAD:	65	Temporario n años	99				
28			PRIMA UNICA :	5265.2	nA'(x)=SEG*(Mx-M(x+n))/D(x)			

Enrique Dieulefait
(Estadístico Matemático)
enrique_dieulefait@argentina.com